CORRECCIÓN 2ª EVALUACIÓN

① 7:55.

OPCIÓN A

1.- $f: (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \dfrac{x(\ln x)^2}{(x-1)^2}$ $\Rightarrow$ Estudiar A. Hor.

Si existe A. Horiz. de la forma $y = K$ cuando $x \to \infty$, será cuando $x \to +\infty$, pues la función sólo está definida cuando $x > 1$.

Por tanto, estudiamos el $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

$$y = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x(\ln x)^2}{(x-1)^2} = \frac{\infty(\ln\infty)^2}{\infty^2} = \frac{\infty}{\infty} =$$

$$= (L'H^*) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2 + x\cdot 2\cdot \ln x \cdot \frac{1}{x}}{2(x-1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2 + 2\ln x}{2(x-1)} = \frac{\infty}{\infty} =$$

$L'H^*$: Al estar formada la función por funciones continuas y derivables podemos aplicar la regla de L'Hôpital

$$= (L'H^*) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\cdot\ln x\cdot\frac{1}{x} + 2\cdot\frac{1}{x}}{2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{2}\left(\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}\right)}{\cancel{2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln x + 1}{x}\right) = \frac{\infty + 1}{\infty} \overset{a)}{=} \left(\ln x \ll x\right) = 0$$

$$b)\ (L'H) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x} + 0}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Por tanto, hay una asíntota horizontal (rama asintótica horizontal cuando $x \to +\infty$) en $\boxed{y = 0}$

2.- $f: [0,4] \rightarrow \mathbb{R}$ $\qquad f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x & \text{si } 0 < x < 3 \\ -2x+8 & \text{si } 3 \leq x < 4 \end{cases}$

a) f? $f(1) = \frac{16}{3}$

b) recta tangente a f en $x = 1$.

a) $$f = \int f'(x)\,dx = \begin{cases} f_1(x) = \int \frac{2}{3}x\,dx = \frac{2}{3}\frac{x^2}{2} + C_1 = \frac{1}{3}x^2 + C_1 \\ f_2(x) = \int (-2x+8)\,dx = -x^2 + 8x + C_2 \end{cases}$$

Al decirnos que $f(1) = \frac{16}{3}$ podemos calcular C_1 y determinar el primer trozo de la función. $(f_1(x))$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^2 + C_1 & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ -x^2 + 8x + C_2 & \text{si } 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

$$f(1) = \frac{1}{3}1^2 + C_1 = \frac{16}{3}; \quad \boxed{C_1 = \frac{15}{3} = 5}$$

Al dar el enunciado $f'(x)$ como una función derivable en $x=3$ $(\exists f'(3))$, la función ha de ser continua en ese punto. Por tanto:

$$f(3) = -9 + 24 + C_2 = \lim_{x \to 3} f(x);$$

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \to 3^-} f(x) = \frac{1}{3} \cdot 3^2 + 5 = 8 \\ \lim_{x \to 3^+} f(x) = 15 + C_2 \end{cases} \quad 8 = 15 + C_2; \quad \boxed{C_2 = -7}$$

Por tanto, al estar definida f en $[0,4]$, tenemos:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^2+5 & \text{si } 0 \le x < 3 \\ -x^2+8x-7 & \text{si } 3 \le x \le 4. \end{cases}$$

b) La recta tangente en $x=1$ tiene de pendiente $m = f'(1)$ y pasa por el pto $(1, 16/3)$, dado por el enunciado

$$f'(1) = \frac{2}{3}\cdot 1 = \frac{2}{3}$$

Usamos la forma punto-pendiente de la ec. de la recta: $y - y_0 = m(x - x_0)$

$$y - \frac{16}{3} = \frac{2}{3}(x-1); \quad 3y - 16 = 2x - 2$$

que queda, en forma general: $\boxed{2x - 3y + 14 = 0}$

3.- $f:(0,2) \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si } 0 < x \le 1 \\ \ln(2-x) & \text{si } 1 < x < 2 \end{cases}$

$\boxed{1'5}$ b) $\displaystyle\int_1^{1'5} f(x)\,dx = \int_1^{1'5} \ln(2-x)\,dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Por partes:} \\ u = \ln(2-x) \quad du = \frac{-1}{2-x}dx \\ dv = dx \quad v = x \end{array} \right\}$

$\displaystyle = \Big[x \ln(2-x)\Big]_1^{1'5} - \int_1^{1'5} \frac{-x}{2-x}\,dx = \Big[x \ln(2-x)\Big]_1^{1'5} + \int_1^{1'5} \left[-1 + \frac{2}{2-x}\right] dx =$

$$\begin{array}{r|l} x & 2-x \\ \hline -x+2 & -1 \\ \hline 2 & \end{array}$$

$$= \left[x\,Ln(2-x) - x\right]_1^{1'5} + 2\int_1^{1'5} \frac{1}{2-x}\,dx = \left[x\,Ln(2-x) - x - 2\,Ln(2-x)\right]_1^{1'5} =$$

$$= \left[1'5\,Ln(0'5) - 1'5 - 2\,Ln(0'5)\right] - \left[1\cdot \underbrace{Ln(1)}_{0} - 1 - 2\,\underbrace{Ln(1)}_{0}\right] =$$

$$= -0'5\cdot Ln(0'5) - 0'5 = \boxed{-0'5\,\left[Ln(0'5) + 1\right]}$$

4.- $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

$\boxed{1}$ a) $A^2 - A = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$ a?

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - A = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2-a & -1 \\ 0 & a^2+a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} a^2 - a = 12 \\ -1 = -1 \\ 0 = 0 \\ a^2 + a = 20 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow a^2 - a - 12 = 0 \Rightarrow (\text{Cardano}) : \begin{cases} a_1 = 4 \\ a_2 = -3 \end{cases} \\ \\ \rightarrow a^2 + a - 20 = 0 \Rightarrow (\text{Cardano}) : \begin{cases} a_1 = 4 \\ a_3 = -5 \end{cases} \end{array}$$

La única solución que hace que el sistema de ecuaciones sea compatible es $\boxed{a = 4}$.

5.- $A \cdot B^t X = -2C$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

$D = A \cdot B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$

Para calcular X, debemos aislarla en el primer miembro de la ec. matricial planteada.

El producto $A \cdot B^t$ lo hemos llamado D, que es una matriz cuadrada: $D = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$, a la que calcularemos su inversa D^{-1}, para despejar X:

$$A \cdot B^t \cdot X = -2C; \quad D \cdot X = -2C;$$

$$D^{-1} \cdot D \cdot X = D^{-1}(-2C)^{(1)}; \quad \boxed{X = -2 \cdot D^{-1} \cdot C}^{(2)}$$

D^{-1}: $\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & -6 & 1 & 0 \\ -5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 - 5F_1]{-F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 28 & -5 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$

$\xrightarrow{\frac{1}{28}F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -5/28 & 1/28 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 - 6F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{28} & -6/28 \\ 0 & 1 & -5/28 & 1/28 \end{array}\right)$

Por tanto: $D^{-1} = \begin{pmatrix} 2/28 & -6/28 \\ -5/28 & 1/28 \end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{28}\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = D^{-1}}$

Así: $\boxed{X = -2 \cdot \frac{1}{28}\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{14}\begin{pmatrix} 2 & 14 \\ -5 & -21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/7 & -1 \\ \frac{5}{14} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}}$

(1) El prod. de matrices no es conmutativo; (2) Por la conmutatividad del prod. de reales y mat.

OPCIÓN B

1: $f:[0,5]\to\mathbb{R}$ $f(x)=\begin{cases} ax+bx^2 & \text{si } 0\le x<2 \\ -4+\sqrt{x-1} & \text{si } 2\le x\le 5\end{cases}$

derivable en $(0,5)$

a) a, b? 1º) Si $f(x)$ es derivable ha de ser continua en todo el intervalo y, por tanto en $x=2$, punto donde cambia la definición de la curva:

En $x=2$: $f(2)=-4+\sqrt{2-1}=-4+\sqrt{1}=\boxed{-3=f(2)}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}(ax+bx^2)=2a+4b \\ \lim\limits_{x\to2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}(-4+\sqrt{x-1})=-4+\sqrt{1}=-3\end{array}\right\}$$

Para que exista $\lim\limits_{x\to2} f(x) \Rightarrow \boxed{2a+4b=-3}$ (1)

Tenemos una primera ecuación que relaciona a los dos parámetros buscados "a" y "b".

2º) Como $f(x)$ es derivable en $(0,5)$, también lo será en $x=2$. Calculemos $f'(x)$ y forzaremos la existencia de $f'(2)$:

$$f'(x)=\begin{cases} a+2bx & \text{si } 0<x<2 \\ 0+\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} & \text{si } 2<x<5\end{cases}$$

Para que exista $f'(2)$ se ha de cumplir la igualdad de las derivadas laterales en $x=2$

$$\lim_{x\to 2^-} f'(x) = f'(2^-) = \lim_{x\to 2^-}(a+2bx) = a+4b$$

$$\lim_{x\to 2^+} f'(x) = f'(2^+) = \lim_{x\to 2^+}\left(\frac{1}{2\sqrt{x-1}}\right) = \frac{1}{2}$$

Por tanto: $\boxed{a+4b=\frac{1}{2}}$ (2)

Tenemos un sistema de dos ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{l}(1):\ 2a+4b=-3\\(2):\ a+4b=\frac{1}{2}\end{array}\right\} \text{1-2: } a=-3-\frac{1}{2}=\boxed{-\frac{7}{2}=a}$$

$$4b=\frac{1}{2}-a=\frac{1}{2}-\left(-\frac{7}{2}\right)=\frac{8}{2}=4$$

$$\boxed{b=1}$$

Por tanto: $\boxed{a=-\frac{7}{2}}$ y $\boxed{b=1}$

b) Tangente a la gráfica en $x=2$

La recta tangente ha de pasar por $(2, f(2))$ y tener como pendiente $m=f'(2)$

$$f(2)=-3 \quad y \quad f'(2)=\frac{1}{2}$$

Aplicando la forma pto-pendiente de la ec. de la recta: $y-y_0=m(x-x_0) \Rightarrow$

$y+3=\frac{1}{2}(x-2)$; $2y+6=x-2$;

Sol: $\boxed{x-2y-8=0}$

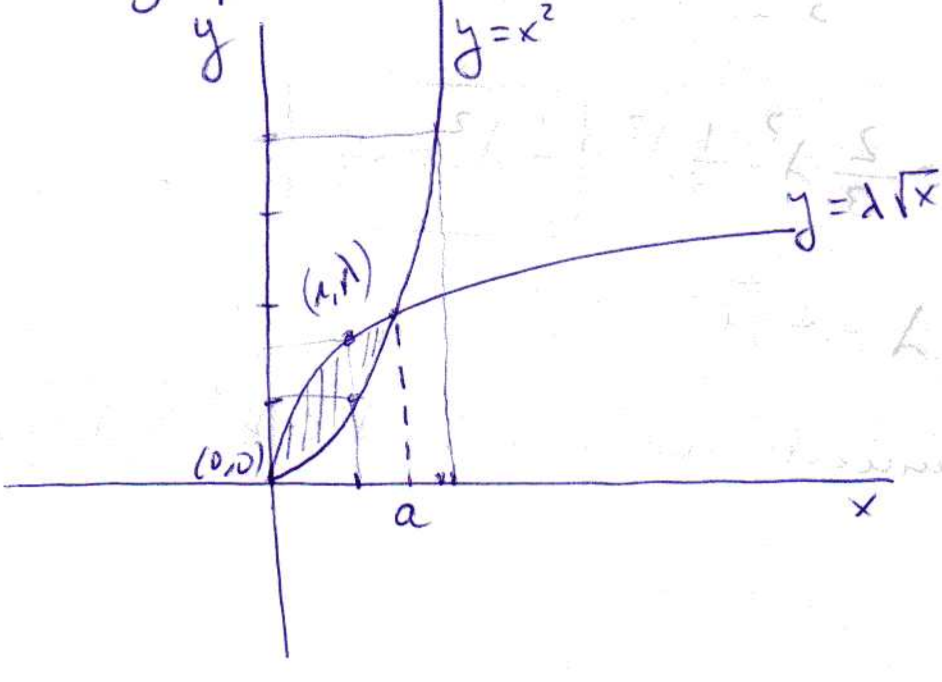
---

2 f y $g: [0,+\infty) \to \mathbb{R}$

$f(x)=x^2$ y $g(x)=\lambda\sqrt{x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$S=\frac{1}{3}$

$f(x)$ es una parábola de eje vertical en $x=0$ mientras que $g(x)$ es una semiparábola de eje horizontal en el eje de abscisas. Ambas tienen su vértice en el origen de coordenadas y su representación gráfica esbozada será:



El área resaltada es la que queda entre ambas curvas. Hay que calcular "a", abscisa del punto de corte de ambas para poder hacer la integral.

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = \lambda\sqrt{x} \end{array}\right\} \quad x^2 = \lambda\sqrt{x}\ ;\quad (x^2)^2 = (\lambda\sqrt{x})^2\ ;\quad x^4 = \lambda^2\cdot x\ ;$$

$$x^4 - \lambda^2 x = 0\ ;\quad x(x^3-\lambda^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x^3 - \lambda^2 = 0 \end{cases}$$

$$x^3 = \lambda^2\ ;\quad \boxed{x_2 = \sqrt[3]{\lambda^2}}$$

Por tanto: $S = \frac{1}{3} = \int_0^{\sqrt[3]{\lambda^2}} \overset{*}{[\lambda\sqrt{x} - x^2]}\, dx =$

* $y = \lambda\sqrt{x}$ está por encima de $y = x^2$ en el int. $(0, \sqrt[3]{\lambda^2})$:

$$= \int_0^{\sqrt[3]{\lambda^2}} [\lambda \cdot x^{1/2} - x^2]\, dx = \left[\lambda \frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt[3]{\lambda^2}} =$$

$$= \lambda \cdot \frac{(\lambda^{2/3})^{3/2}}{3/2} - \frac{(\lambda^{2/3})^3}{3} - (0) = \frac{2}{3}\lambda\cdot\lambda^{6/6} - \frac{\lambda^{6/3}}{3} =$$

$$= \frac{2}{3}\lambda\cdot\lambda - \frac{\lambda^2}{3} = \frac{2}{3}\lambda^2 - \frac{1}{3}\lambda^2 = \boxed{\frac{1}{3}\lambda^2 = \frac{1}{3}}$$

$$\lambda^2 = 1\ ;\quad \lambda = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

Como el enunciado indica que $\lambda \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \boxed{\lambda = +1}$

3.- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x + e^{-x}$

a) Int. de crec/decrec y ext. relativos

b) Concavidad y convexidad.

$f(x)$ está formada por la suma de dos funciones ("x" y "e^{-x}") que son continuas y derivable en todo $\mathbb{R}$, por tanto f también lo es.

Para calcular el apdo. a tenemos que estudiar el signo de la 1ª derivada.

$$f'(x) = 1 - e^{-x};$$

Calculemos los ext. relativos posibles haciendo

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \quad 1 - e^{-x} = 0; \quad 1 = e^{-x}; \quad \boxed{x = 0}$$

Habrá un posible ext. relativo en $x = 0 \Rightarrow$

$$f(0) = 0 + e^{-0} = 0 + 1 = 1 \Rightarrow (0, 1)$$

Al ser continua en todo $\mathbb{R}$ no presenta A.V. Tampoco tiene cambios de definición, Así, únicamente el extremo relativo $(0,1)$ provocará un cambio de monotonía.

$x_1 = -10$	$x_2 = +10$
	$x = 0$

Estudiamos el signo de la derivada en los dos puntos elegidos : $x_1 = -10$ y $x_2 = +10$:

$f'(-10) = 1 - e^{-(-10)} = 1 - e^{10} < 0$ ↘ $f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0)$

$f'(+10) = 1 - e^{-(10)} = 1 - e^{-10} = 1 - \frac{1}{e^{10}} > 0$ ↗ $f(x)$ es creciente en $(0, +\infty)$

Por tanto $f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0)$ y creciente en $(0, +\infty)$, presentando un mínimo relativo (y absoluto) en $(0, 1)$.

b) Para hallar los intervalos de concavidad y convexidad de f, hacemos el estudio de $f''(x)$:

$f''(x) = 0 + e^{-x} = e^{-x}$

$f''(x) = e^{-x} = 0 \Rightarrow$ $\underline{x = +\infty \notin \mathbb{R}}$

La 2ª derivada no se anula para ningún valor real.

Al no haber discontinuidades ni anulación de la 2ª derivada, toda la recta real tendrá la misma curvatura.

Tomamos $x=0$ y calculamos $f''(0) = e^{-0} = 1 > 0$, por tanto $f(x)$ será convexa $(\cup)$ en todo $\mathbb{R}$, confirmándose nuevamente la existencia de un mínimo en el pto. $(0,1)$.

4.- $A = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B = (2, 1)$ $\quad C = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$

Para que exista la inversa de $AB + C$ esta tiene que ser cuadrada. Vemos el resultado de la op. propuesta:

$$A \cdot B + C = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} (2, 1) + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}$$

Intentamos calcular su inversa:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -7 & -5 & 1 & 0 \\ 10 & 8 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{7}F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 5/7 & -1/7 & 0 \\ 10 & 8 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{F_2 - 10F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 5/7 & -1/7 & 0 \\ 0 & 6/7 & \frac{10}{7} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{7}{6}F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 5/7 & -1/7 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{10}{6} & 7/6 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{F_1 - \frac{5}{7}F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -4/3 & -5/6 \\ 0 & 1 & \frac{10}{6} & \frac{7}{6} \end{array}\right) \Rightarrow \boxed{(AB+C)^{-1} = \begin{pmatrix} -4/3 & -5/6 \\ \frac{10}{6} & 7/6 \end{pmatrix}}$$

$$-\frac{1}{7} - \frac{5}{7} \cdot \frac{\cancel{10}^{5}}{\cancel{6}_{3}} = -\frac{1}{7} - \frac{25}{21} = \frac{-28}{21} = \frac{-4}{3}$$

$$0 - \frac{5}{\cancel{7}} \cdot \frac{\cancel{7}}{6} = -\frac{5}{6}$$

5.- $\left.\begin{array}{l} x - y + z = 2 \\ x + \lambda y + z = 8 \\ \lambda x + y + \lambda z = 10 \end{array}\right\}$

a)

$$A/A^*: \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & \lambda & 1 & 8 \\ \lambda & 1 & \lambda & 10 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} F_2-F_1 \\ F_3-\lambda F_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & \lambda+1 & 0 & 6 \\ 0 & 1+\lambda & 0 & 10-2\lambda \end{array}\right)$$

$1^o \Rightarrow$ Si $10-2\lambda = 6$; $4 = 2\lambda$; $\boxed{\lambda = 2}$ tenemos 2 ecs. válidas y 3 incógnitas, por lo que tendremos un sist. de ecs. completo compatible indeterminado con 1 gº de libertad.

$2^o \Rightarrow \forall \lambda \neq 2 \Rightarrow$ Sist. Completo incompatible $\Rightarrow$ sin solución.

b) $\lambda = 2 \Rightarrow$ tenemos que: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ \cancel{0} & \cancel{3} & \cancel{0} & \cancel{6} \end{array}\right)$ y quitamos la 3ª ec. para obtener un sist. de ecs. equivalente, que es el que resolveremos:

$\left.\begin{array}{l} x - y + z = 2 \\ \quad 3y = 6 \end{array}\right\}$ de donde $\boxed{y = 2}$

y la 1ª ecu. queda: $x + z = 4$;

Hacemos $z = \alpha$ y queda $x = 4-\alpha$ y la solución será: $\boxed{x = 4-\alpha;\ y = 2;\ z = \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}}$

o bien: $\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-\alpha \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix} \ \alpha \in \mathbb{R}}$